Contrôle continu du 07/11/2009 (durée: 3h)

Question 1 (1 point). Déterminer la période de la fonction $f(x) = \cos 2x + 3\cos 6x$.

Question 2 (1 point). Déterminer le support de la fonction $f(x) = |x-3| + |x+3| - 2|x|$.

Question 3 (1 point). Donner un exemple d'une suite de fonctions $\{f_n(x)\}$ qui converge simplement vers $f(x) = x^2$ en tout point de l'intervalle $I = (0,1)$ mais qui ne converge pas vers $f(x)$ uniformement sur I.

Question 4 (1 point). Donner un exemple d'une fonction $f(x)$ de période π telle que sa série de Fourier $S_f(x)$ converge simplement pour tout x mais ne coïncide pas avec $f(x)$.

Question 5 (2 points). Calculer, au sens des distributions, la 1ère et la 2ème dérivée de la fonction $f(x) = |x-3| + |x+3| - 2|x|$.

Question 6 (4 points). On considère l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique forcé:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t), \tag{1}$$

munie des conditions initiales

$$x(0) = 0, \qquad \dot{x}(0) = v_0. \tag{2}$$

Ici ω_0, v_0 sont constants, $f(t)$ est une fonction quelconque qui représente la force extérieure.

1. Trouver la solution de l'équation homogène ($f(t) = 0$) vérifiant les conditions (2).
2. En utilisant la méthode de la fonction de Green, trouver la solution de l'équation (1) vérifiant les conditions initiales homogènes ($v_0 = 0$).
3. En utilisant 2 résultats précédents, obtenir la solution du problème (1)–(2). Explicitez le résultat pour $f(t) = f_0 \sin \omega t$ ($\omega \neq \omega_0$) et vérifiez-le.

Question 7 (4 points). On s'intéresse à l'équation différentielle suivante:

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = f(x), \tag{3}$$

munie des conditions limites

$$y(1) = y(3) = 0. \tag{4}$$

1. Trouver la solution générale de l'équation homogène correspondante.
2. Calculer la fonction de Green associée.
3. Trouver la solution de (3)–(4) pour $f(x) = \alpha x^3$. Vérifer le résultat.

Question 8 (4 points).

1. Tracer la fonction 2π-périodique f définie par $f(x) = x(2\pi - x)$ pour $x \in [0, 2\pi)$.
2. Développer cette fonction en série de Fourier de cosinus.

3. En déduire, pour $a \in (0, \pi)$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2}$.

4. Vérifiez le résultat en appliquant l'identité de Parseval à la fonction 2π-périodique g définie par
$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \in [\pi - a, \pi + a], \\ 0 \text{ pour } x \in [0, \pi - a) \cup (\pi + a, 2\pi). \end{cases}$$

Question 9 (6 points). Calculer, au sens des distributions,
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \ln\left(x^2 + y^2\right).$$

(Du point de vue général, l'espace $\mathcal{D}$ est remplacé ici par l'espace $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ des fonctions lisses à support compact sur $\mathbb{R}^2$. A chaque fonction f localement intégrable on associe une distribution T_f par
$$\langle T_f, \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\varphi(x,y)\, dxdy, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^2\right).$$

Les dérivées de distributions sont définies de façon analogue à la dimension 1.)
Indication: On pourra utiliser le théorème de Green.